3ο μαθημα

9/3/20

Πάλι (για σήμερα) $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$
Είχαμε δείξει ότι $V(x^2 + y^2 - 1)$ είναι ρητή

$$x(t) = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$y(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

"Πυθαγόρειες τριάδες"

- Μία τριάδα (x, y, z) φυσικών αριθμών λέγεται πυθαγόρεια τριάδα αν ισχύει $x^2 + y^2 = z^2$
  π.χ. $(3, 4, 5)$

Αν (x_0, y_0, z_0) πυθαγόρεια τριάδα κ. $\lambda \in \mathbb{N}$ τότε $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ πυθαγόρεια τριάδα.

Δηλ.: (x_0, y_0, z_0) πυθαγόρεια τριάδα

$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = z_0^2$

$\Rightarrow (\lambda x_0)^2 + (\lambda y_0)^2 = (\lambda z_0)^2$

$\Rightarrow (\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ πυθαγόρεια τριάδα

- Μία πυθαγόρεια τριάδα (x_0, y_0, z_0) λέγεται $\boxed{\text{αρχική}}$ αν
  $\text{Μ.Κ.Δ.}(x_0, y_0, z_0) = 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ευκλείδης):

Όλες οι αρχικές Πυθαγόρειες τριάδες είναι της μορφής:

$x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$ ή $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$

όπου u, v είναι φυσικοί πρώτοι μεταξύ τους με τον έναν από τους δύο άρτιο κ' τον άλλο περιττό

ΑΠΟΔ.: $\boxed{\text{π.χ. } u=4 \quad v=5}$ ΕΚΤΟΣ

($\Leftarrow$) Έστω $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$

όπου u, v πρώτοι μεταξύ τους κ' ο ένας από τους δύο είναι άρτιος κ' ο άλλος περιτ.

Θ.ν.δ.ο. (x, y, z) αρχική Πυθαγ. 3άδα

δηλ. $x^2 + y^2 = z^2$

$$x^2 + y^2 = 4u^2v^2 + (u^2 - v^2)^2$$
$$= 4u^2v^2 + u^2 + v^2 - 2u^2v^2$$
$$= 2u^2v^2 + u^2 + v^2 = (u^2 + v^2)^2 = z^2$$

Απέδειξα ότι είναι Πυθαγ. 3άδα.

Μένει ν.δ.ο. είναι αρχική.

$M.K.\Delta.(2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2) = d$

Θ.ν.δ.ο. $d = 1$

Γνωρίζω ότι $M.K.\Delta.(u, v) = 1$ κ' ότι ένα από τα u, v άρτιος κ' το άλλο περιττός

$M.K.\Delta.(2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2) = d$

$\Rightarrow d \mid 2uv$

$\left.\begin{array}{l} d \mid u^2 - v^2 \\ d \mid u^2 + v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \mid 2u^2 \\ d \mid 2v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid MK\Delta(2u^2, 2v^2) = 2MK\Delta(u^2, v^2) = 2$

$\Rightarrow d \mid 2$

$\Rightarrow d = 1$ ή $d = 2$

Έστω $d = 2 \Rightarrow 2 \mid u^2 + v^2$

Έστω u άρτιος κ' v περιττός $\Rightarrow$

Αν $M.K.\Delta.(u, v) = 1$
$\Rightarrow MK\Delta(u^2, v^2) = 1$
Έχουν ίδιους πρώτους αριθμούς (αν κάνουμε πρωτογενή ανάλυση)
π.χ. $u = 3^2 \rightarrow u^2 = 3^4$

$\Rightarrow u^2$ άρτιος , v^2 περιττός
$\Rightarrow u^2+v^2$ περιττός
Όμως $2 \mid u^2+v^2$ ΑΤΟΠΟ
άρα $\boxed{d=1}$

$\Rightarrow$) Έστω (x,y,z) αρχική πυθαγ. τριάδα
άρα $x^2+y^2=z^2$ κ. $\text{Μ.Κ.Δ.}(x,y,z)=1$
(πυθαγ. τριάδα)

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε μια προτάσεων:

1. Τα x,y δεν είναι κ. τα δύο άρτιοι

ΑΠΟΔ. Έστω ότι ήταν x άρτιος, y άρτιος

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2 \mid x \\ 2 \mid y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 \mid x^2 \\ 2 \mid y^2 \end{matrix} \Rightarrow 2 \mid x^2+y^2 = z^2$$
$$\Rightarrow 2 \mid z^2 = z \cdot z$$
κ. 2 πρώτος
$$\Rightarrow 2 \mid z$$

$$\left.\begin{matrix} 2 \mid x \\ 2 \mid y \\ 2 \mid z \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \mid \text{Μ.Κ.Δ.}(x,y,z)=1$$
ΑΤΟΠΟ

2. Τα x,y δεν είναι κ. τα δύο περιττοί

ΑΠΟΔ. Έστω x,y περιττοί
$\Rightarrow x=2k+1$, $y=2\lambda+1$
$\Rightarrow x^2=4k^2+4k+1$, $y^2=4\lambda^2+4\lambda+1$
$\Rightarrow x^2 \equiv 1 \bmod 4$, $y^2 \equiv 1 \bmod 4$
$\Rightarrow x^2+y^2 \equiv 2 \bmod 4$
$\Rightarrow z^2 \equiv 2 \bmod 4$

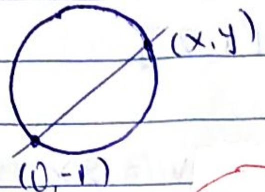
Αν $z=2\mu$ άρτιος $\Rightarrow z^2=4\mu^2 \Rightarrow z^2 \equiv 0 \bmod 4$
Αν $z=2\mu+1$ $\Rightarrow z^2=4\mu^2+4\mu+1 \Rightarrow z^2 \equiv 1 \bmod 4$
ΑΤΟΠΟ

Άρα ένα από τα x,y είναι άρτιο κ. το άλλο περιττό

Υποθ. ότι X άρτιο κ. Y περιττό $\Rightarrow Z \neq 0$

Γνωρίζω ότι $X^2+Y^2=Z^2$, X,Y,Z φυσικοί αριθμοί με $Μ.Κ.Δ.(X,Y,Z)=1$

Θέτω $x=\dfrac{X}{Z}$, $y=\dfrac{Y}{Z}$ $\Rightarrow$ $x,y\in\mathbb{Q}$ κ. $x^2+y^2=1$



$x=\dfrac{2t}{t^2+1}$, $y=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $t=\dfrac{y+1}{x}\in\mathbb{Q}^+$ (γιατί $x,y\in\mathbb{Q}$)

$y+1=t\cdot(x-0)$

Κάθε ρητό μπορώ να το γράψω σαν πηλίκο ακεραίων $\Rightarrow$ $t=\dfrac{u}{v}$, $Μ.Κ.Δ.(u,v)=1$

Γνωρίζω ότι:
$$\begin{cases} \dfrac{X}{Z}=x=\dfrac{2t}{t^2+1}=\dfrac{2\cdot\frac{u}{v}}{\frac{u^2}{v^2}+1}=\dfrac{2uv}{u^2+v^2} \\[2ex] \dfrac{Y}{Z}=y=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}=\dfrac{\left(\frac{u^2}{v^2}-1\right)v^2}{\left(\frac{u^2}{v^2}+1\right)\cdot v^2}=\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\end{cases}$$

δηλ. $X\mid 2uv$ (...)

$$\Rightarrow \begin{cases} X\cdot(u^2+v^2)=Z\cdot 2uv \\ Y\cdot(u^2+v^2)=Z\cdot(u^2-v^2)\end{cases}$$
u,v φυσικοί με $Μ.Κ.Δ.(u,v)=1$

Θεωρία αριθμών πάλι $\rightarrow$ $Μ.Κ.Δ.(X,Z)=d$

$$\left.\begin{matrix} d\mid X \\ d\mid Z\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d^2\mid X^2 \\ d^2\mid Z^2\end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow d^2\mid Z^2-X^2=Y^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow d=1$

<u>Άρα</u>: $Μ.Κ.Δ.(X,Z)=1 \Rightarrow X\mid 2uv \Rightarrow 2uv=\omega X$

άρα: $$\begin{cases} X\cdot(u^2+v^2)=Z\cdot\omega X \Rightarrow u^2+v^2=\omega Z \quad (1) \\ Y\cdot\omega Z=Z\cdot(u^2-v^2)\Rightarrow u^2-v^2=\omega Y \quad (2)\end{cases}$$ <u>και</u>

Θ.υ.α.ο. $\omega = 1$

$$\left.\begin{aligned}(1) \rightarrow \quad & \omega \mid u^2+v^2 \\ (2) \rightarrow \quad & \omega \mid u^2-v^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&\omega \mid 2u^2 \\ &\omega \mid 2v^2\end{aligned}$$

άρα $\omega \mid \text{Μ.Κ.Δ.}(2u^2, 2v^2) = 2\cdot \text{Μ.Κ.Δ.}(u^2, v^2) = 2$

$\Rightarrow \omega \mid 2 \Rightarrow \omega \in [1, 2]$

Έστω ότι $\omega = 2$

Γνωρίζω ότι $2uv = \omega X \xrightarrow{\omega = 2} 2uv = 2X \Rightarrow X = uv$

$$\left.\begin{aligned}&X \text{ άρτιο} \Rightarrow uv \text{ άρτιος} \\ &\text{Μ.Κ.Δ.}(u,v) = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Ένας από τους δύο είναι άρτιος κ' ο άλλος περιττός.}$$

Όμως: $(1) \xrightarrow{\omega = 2} 2 \mid \underbrace{u^2+v^2}$

περιττός γιατί ο ένας άρτιος κ' ο άλλος περιττός.

Άρτιος + περιττός = Περιττός

$\boxed{\text{ΑΤΟΠΟ}}$

Άρα $\boxed{\omega = 1}$

συνεπώς $X = 2uv$, $Y = u^2 - v^2$, $Z = u^2 + v^2$

Ισχυρίζομαι ότι ένα από τα δύο είναι άρτιο κ' το άλλο περιττό.

Έστω ότι δεν ισχύει

$\Rightarrow$ Και τα δύο άρτια ή κ' τα δύο περιττά

Έστω u, v άρτια $\Rightarrow \left.\begin{aligned}2 \mid u \\ 2 \mid v\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 \mid \text{Μ.Κ.Δ.}(u,v) = 1$

ΑΤΟΠΟ

Έστω u, v περιττά

$\Rightarrow X = 2uv$ άρτιος

$Y = u^2 - v^2$ άρτιος

$Z = u^2 + v^2$ άρτιος

[Περιττός + Περιττός = Άρτιος]

Άλλα η 3άδα που ήταν αρχική, άρα:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \mid X \\ 2 \mid Y \\ 2 \mid Z \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \mid \text{Μ.Κ.Δ.}(X,Y,Z) = 1$$

ΑΤΟΠΟ

■

ΠΑΡΑΔ.: Αν $u=1204$, $v=1071$

μη αρχική Πυθαγόρεια 3άδα

$(2.578.968,\ 302.575,\ 2.596.657)$

Πιθανό θέμα

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε 4 τριάδες φυσικών αριθμών X, Y, Z τ.ω. $X^2 + 2Y^2 = 11Z^2$ ή ν.α.ο. $\nexists$ τέτοιες τριάδες.

ΛΥΣΗ:

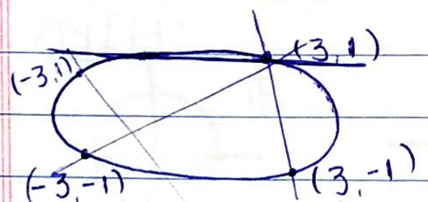
$(3,1,1)$ προφανής τριάδα

Θέτω $x = \dfrac{X}{Z}$, $y = \dfrac{Y}{Z}$

ρητά

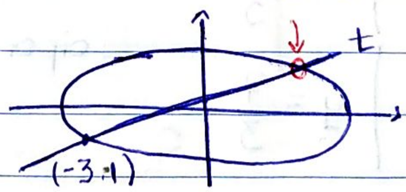
τότε $x^2 + 2y^2 = 11$ (έλλειψη)

$(3,1)$ σημείο της καμπύλης αυτής



άρα ξέρω άλλα 3 σημεία αυτής $(3,-1)$, $(-3,-1)$, $(-3,1)$

Για ευκολία θα πάρω το $(-3,-1)$



$y+1 = t\cdot(x+3)$

κ' κάνω τώρα ό,τι στο προηγ. μάθημα

$y+1 = t\cdot(x+3)$

Θα λύσω το σύστημα: $\begin{cases} x^2+2y^2 = 11 \\ y+1 = t\cdot(x+3) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+1 = t\cdot(x+3) \\ x^2 + 2y^2 - 9 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 + 2(y^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+3) + 2(y-1)(y+1) = 0$$
$$\Rightarrow (x-3)(x+3) + 2t(x+3)\cdot(t\cdot(x+3) - 1 - 1) = 0$$
$$\Rightarrow (x+3)(x-3 + 2t(t\cdot(x+3) - 2)) = 0$$
$$\Rightarrow x = -3 \quad \acute{\eta} \quad x - 3 + 2t(t\cdot(x+3) - 2) = 0$$

(γνωστό)

$$\Rightarrow x - 3 + 2t^2x + 6t^2 - 4t = 0$$
$$\Rightarrow x\cdot(1+2t^2) = 3 + 4t - 6t^2$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3+4t-6t^2}{1+2t^2}}$$

άρα $y = t\cdot(x+3) - 1 = t\left(\dfrac{3+4t-6t^2}{1+2t^2} + 3\right) - 1$

$$= \frac{3t + 4t^2 - 6t^3 + 3t + 6t^3 - 1 - 2t^2}{1+2t^2}$$
$$= \frac{2t^2 + 6t - 1}{1+2t^2}$$

για $t = 1$: $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$ άρα $(X, Y, Z) = (1, 7, 3)$

για $t = \frac{1}{2}$: $\begin{cases} x = \dfrac{3 + \frac{4}{2} - \frac{6}{4}}{1 + 2\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{5 - 3/2}{3/2} = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{2\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{1}{2} - 1}{1 + 2\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{2 + 1/2}{3/2} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

άρα $(x, y, z) = (7, 5, 3)$

για $t = -1$ (θα ναι σίγουρα ΛΑΘΟΣ):

$$\begin{cases} x = \dfrac{3-4-6}{3} = -\dfrac{7}{3} \\[2ex] y = \dfrac{2-6-1}{3} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

άρα $(x, y, z) = (-7, -5, 3)$

"Ξεχνάω" το πρόσημο, άρα "γυρίζω στο πρωτ

για $t = 3$:

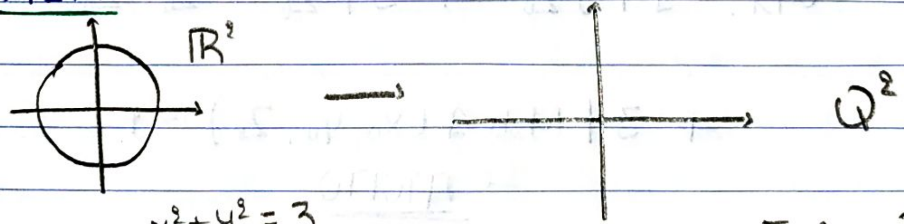
$$\begin{cases} x = \dfrac{3+12-54}{19} = -\dfrac{39}{19} \\[2ex] y = \dfrac{18+18-1}{19} = \dfrac{35}{19} \end{cases}$$

άρα $(x, y, z) = (-39, 35, 19) = (39, 35, 19)$

"Ξεχνάω" το πρόσημο

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε 4 τριάδες φυσικών αριθμών (x, y, z) τ.ω. $x^2 + y^2 = 3z^2$ ή ν.δ.ο. $\nexists$

ΛΥΣΗ:



$x^2 + y^2 = 3$

δηλ. $\nexists$ σημεία

Πώς το δείχνω ?

Έστω x, y, z φυσικοί αριθμοί τ.ω. $x^2 + y^2 = 3z^2$

Έστω Μ.Κ.Δ.$(x, y, z) = d$

Τότε: $d \mid x \Rightarrow x = d \cdot x_0$

$d \mid y \Rightarrow y = d \cdot y_0$

$d \mid z \Rightarrow z = d \cdot z_0$

$x^2 + y^2 = 3z^2 \Rightarrow (dx_0)^2 + (dy_0)^2 = 3(dz_0)^2$

$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 3z_0^2$, $M.K.\Delta.(x_0, y_0, z_0) = 1$

$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 \equiv 0 \bmod 3$

Περιπτώσεις :

x_0	y_0	x_0^2	y_0^2	$x_0^2 + y_0^2$
0	0	0	0	0 ← Εγώ ψάχνω 0mod3
0	1	0	1	1
0	2	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	2
1	2	1	1	2
2	0	1	0	1
2	1	1	1	2
2	2	1	1	2

Όμως $x_0^2 + y_0^2 \equiv 0 \bmod 3$

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \equiv 0 \bmod 3 \\ y_0 \equiv 0 \bmod 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \mid x_0 \\ 3 \mid y_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left.\begin{cases} 3^2 \mid x_0^2 \\ 3^2 \mid y_0^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow 3^2 \mid x_0^2 + y_0^2 = 3z_0^2$

δηλ. $9 \mid 3z_0^2 \Rightarrow 3 \mid z_0^2 = z_0 \cdot z_0 \Rightarrow 3 \mid z_0$

$\Rightarrow 3 \mid M.K.\Delta.(x_0, y_0, z_0) = 1$

ΑΤΟΠΟ

$\blacksquare$

$\boxed{\text{HW} \quad x^2 + 4y^2 = 11z^2}$